SESSION DE 1979

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 1 (exercices)

DURÉE : 4 heures

PREMIER EXERCICE

(Les 3 questions sont indépendantes)

1° L'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}\right) dx$$

est-elle convergente ?

2° Avec $\varphi(x) = x\,e^{-x}$, étudier la convergence des 3 séries numériques :

$$u_n = \varphi(n) \qquad v_n = \varphi(-n) \qquad w_n = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

En cas de convergence, calculer la somme. (On demande la valeur exacte; il ne s'agit pas d'un calcul approché.)

3° Discuter suivant le paramètre réel α la convergence de la série numérique de terme général :

$$u_n = \left(1 - \alpha \frac{\text{Log } n}{n}\right)^n$$

DEUXIÈME EXERCICE

L'espace $\mathbb{R}^3$ étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la courbe Γ ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} t^2 \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\text{Arcsin } t + t\sqrt{1-t^2}\right) \vec{j} + 3t\vec{k} \text{ avec } t \in]-1, +1[.$$

1° Construire la projection orthogonale de Γ sur le plan dont un repère est $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Déterminer le repère de Serret-Frenet (on notera $\vec{\tau}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ ses vecteurs), le rayon de courbure R et le rayon de torsion T au point de paramètre t.

Quelle remarque peut-on faire sur la courbure et la torsion ?

TROISIÈME EXERCICE

1° Résoudre les deux équations différentielles :

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 2\,e^{-x} \cos x$$

On constatera qu'elles ont une solution commune que l'on notera f.

2° On considère la série numérique de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx.$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer la somme.

3° On considère l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$. Montrer qu'elle possède deux racines positives. Soit α la plus petite de ces deux racines. Calculer α avec une erreur inférieure à 10^{-4}. On indiquera la méthode employée.

QUATRIÈME EXERCICE

On considère le système différentiel $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \begin{cases} t(t-2)\dfrac{dx}{dt} = t(x+y) - 4x \\ t(t-2)\dfrac{dy}{dt} = 2(ty - 2x) \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions réelles inconnues de la variable réelle t.

1° On se place sur l'intervalle]0 2[.

Chercher des solutions de $\mathcal{S}$ telles que $x(t) = y(t)$ pour tout t appartenant à]0 2[.

Déterminer ensuite toutes les solutions de $\mathcal{S}$ sur]0 2[.

.../...

2° Les résultats de la question précédente permettent-ils de déterminer les solutions de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$?

CINQUIÈME EXERCICE

On considère l'ensemble E des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

a, b, c, appartenant à $\mathbb{R}$ avec $a^2 + bc$ strictement positif.

On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{a^2 + bc}$$

Pour A appartenant à E, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1° Pour $A \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n (on pourra l'exprimer à l'aide de A, I, n et δ).

2° On forme les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{A^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{avec } 0! = 1)$$

Montrer que S_n et C_n peuvent s'écrire sous la forme :

$$S_n = X u_n \text{ et } C_n = Y v_n$$

où X et Y sont des matrices et u_n et v_n les termes généraux de 2 suites numériques que l'on précisera.

3° On désigne par F le sous-ensemble de E constitué des matrices A telles que u_A ait pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que les matrices de F sont de la forme λZ, λ étant un réel non nul et Z une matrice que l'on précisera.

4° E et F sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail